71 Considera i piani di equazioni $\pi: x - y + z = 0$ e $\pi': x + y + 2z = 0$.

a. Verifica che sono incidenti e determina l'equazione parametrica della retta r intersezione.

b. Determina la retta s parallela a r e passante per il punto $P(1; -1; 2)$.

c. Determina le equazioni del piano α, passante per il punto P e per la retta r, e del piano β, passante per il punto P e perpendicolare a r.

$$\left[\text{a) } r: \begin{cases} x = 3t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}; \text{ b) } s: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}; \text{ c) } \alpha: 2y + z = 0; \beta: 3x + y - 2z + 2 = 0\right]$$

a) $r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$

Si vede subito che $O(0,0,0)$ è soluzione del sistema, quindi i 2 piani sono incidenti

$$\begin{cases} x - t + z = 0 \\ y = t \\ x + t + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = t - z \\ y = t \\ t - z + t + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = t + 2t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$$

b) $s: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ $\qquad P(1, -1, 2)$

c) Piano per $P(1,-1,2)$ e per $r: \begin{cases} x = 3t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} t = 0 & O(0,0,0) \\ t = 1 & Q(3,1,-2) \end{matrix}$

Ho 3 punti P, O, Q che determinano il piano:

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{matrix} O(0,0,0) \Rightarrow \\ P(1,-1,2) \Rightarrow \\ Q(3,1,-2) \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} d = 0 \\ a - b + 2c = 0 \\ 3a + b - 2c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} d = 0 \\ a = 0 \\ a - b + 2c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} d = 0 \\ a = 0 \\ b = 2c \end{cases} \quad \begin{cases} c = 1 \\ d = 0 \\ a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$4a \quad // \quad // \quad = 0$$

$$\boxed{\alpha: 2y + z = 0}$$

β: piano passante per $P(1,-1,2)$ e $\perp$ a $r: \begin{cases} x = 3t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$

Il vettore normale è $\vec{v} = (3,1,-2)$, cioè il vettore direzione di r

$$3(x-1) + 1\cdot(y+1) - 2(z-2) = 0$$

$$3x - 3 + y + 1 - 2z + 4 = 0$$

$$\boxed{\beta: 3x + y - 2z + 2 = 0}$$

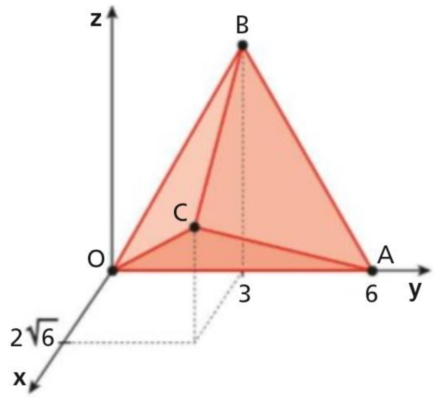
72 Dati i punti $O(0; 0; 0)$, $A(0; 6; 0)$, $B(0; 3; 3\sqrt{3})$, $C(2\sqrt{6}; 3; \sqrt{3})$:

a. verifica che sono i vertici di un tetraedro regolare;

b. scrivi le equazioni della retta a cui appartiene lo spigolo AC sotto forma di intersezione di due piani;

c. determina l'equazione della superficie sferica circoscritta.

[c) $x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{6}\,x - 6y - 2\sqrt{3}\,z = 0$]



a) Devo controllare che tutti gli spigoli abbiano la stessa lunghezza:

$\overline{OA} = 6 \qquad \overline{OB} = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6 \qquad \overline{AB} = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6$

$\overline{OC} = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + 3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6 \qquad \overline{AC} = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + (-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = 6$

$\overline{BC} = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + 0^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{24 + 12} = 6$

b) $A(0,6,0) \qquad C(2\sqrt{6}, 3, \sqrt{3})$

vettore direzione $\vec{AC} = (2\sqrt{6}, -3, \sqrt{3})$

$$r: \begin{cases} x = 2\sqrt{6}\,t \\ y = 6 - 3t \\ z = \sqrt{3}\,t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2\sqrt{6}\cdot\dfrac{z}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}\,z \\ y = 6 - \dfrac{3z}{\sqrt{3}} = 6 - \sqrt{3}\,z \\ t = \dfrac{z}{\sqrt{3}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2\sqrt{2}\,z = 0 \\ y + \sqrt{3}\,z - 6 = 0 \end{cases}$$

c) $O(0,0,0)$ $A(0,6,0)$ $B(0,3,3\sqrt{3})$ $C(2\sqrt{6},3,\sqrt{3})$

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

$$\begin{aligned}
O &\Rightarrow \quad d=0 \\
A &\Rightarrow \quad 36+6b=0 \Rightarrow b=-6 \\
B &\Rightarrow \quad 9+27+3b+3\sqrt{3}c=0 \\
&\qquad 36-18+3\sqrt{3}c=0 \qquad 3\sqrt{3}c=-18 \qquad c=-\frac{18}{3\sqrt{3}}=-\frac{6}{\sqrt{3}} \\
C &\Rightarrow \quad \cancel{24}+9+3+2\sqrt{6}a-\cancel{18}-\cancel{6}=0 \qquad =-\frac{6}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$2\sqrt{6}a=-12$$

$$\sqrt{6}a=-6 \qquad a=-\frac{6}{\sqrt{6}}=-\sqrt{6}$$

$$\begin{cases} a=-\sqrt{6} \\ b=-6 \\ c=-2\sqrt{3} \\ d=0 \end{cases} \qquad x^2+y^2+z^2-\sqrt{6}x-6y-2\sqrt{3}z=0$$