238 Si mescolano le carte di un mazzo di 40 carte e si dispongono in fila su un tavolo.

a. Quante sono le file diverse possibili delle carte?

b. In quanti casi tutte le carte dello stesso seme sono vicine?

c. Se peschi quattro carte in fila, in quanti modi puoi ottenere quattro carte di semi diversi?

[a) 40!; b) $4!(10!)^4$; c) 240 000]

a) $40!$

b) ♥ ♠ ♦ ♣

$10!$ $\quad 10!$ $\quad 10!$ $\quad 10!$

$$(10!)^4 \cdot 4!$$

numero di permutazioni dei gruppi ♥♠♦♣

c) ♥ ♠ ♦ ♣ ← questi possono essere permutati

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$$

$$10^4 \cdot 4! = 10^4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 240\,000$$

240 Calcola, fra tutte le cinquine che possono essere formate con i novanta numeri del gioco del lotto, quante sono quelle formate da due numeri inferiori a 20 e da tre numeri superiori a 60. [694 260]

ESEMPI

3 19 ‖ 63 72 89

10 17 ‖ 65 74 77

⋮

$$\binom{19}{2} \cdot \binom{30}{3} = \frac{19!}{2!\,17!} \cdot \frac{30!}{3!\,27!} = \frac{19 \cdot \overset{9}{\cancel{18}} \cdot \cancel{17!}}{\cancel{2} \cdot \cancel{17!}} \cdot \frac{\overset{10}{\cancel{30}} \cdot 29 \cdot \overset{14}{\cancel{28}} \cdot \cancel{27!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{27!}} =$$

$$= \boxed{694260}$$

241 Come abbiamo visto, per formare le targhe automobilistiche si utilizzano ventidue lettere e dieci cifre; le targhe sono formate da due lettere seguite da tre cifre e di nuovo da due lettere. Calcola quante sono le targhe possibili che hanno:

a. uguali le prime due lettere e uguali le ultime due;

b. le tre cifre tutte pari. [a) 484 000; b) 29 282 000]

a) AA 375 BB

WW 486 ZZ

⋮

$$22 \cdot D'_{10,3} \cdot 22 = 22^2 \cdot 10^3 = \boxed{484000}$$

b) AW 286 PX

⋮

$$22^2 \cdot 5^3 \cdot 22^2 = \boxed{29282000}$$

242 Quanti numeri di cinque cifre puoi formare con quelle del numero 83 368 in modo che le cifre 8 e 3 siano ripetute due volte? Quanti iniziano con 8? Quanti sono maggiori di 60 000? [30; 12; 18]

83368

a) $$P_5^{(2,2)} = \frac{5!}{2!\,2!} = \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot 3 \cdot 2}{\cancel{2} \cdot \cancel{2}} = \boxed{30}$$

b) Inizio a scrivere $8\,\underbrace{\_\,\_\,\_\,\_}_{\text{permutazioni degli elementi rimanenti}}$

$$P_4^{(2)} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = \boxed{12}$$

c) Sono maggiori di 60000 quelli che iniziano per 8 (e sono 12) e quelli che iniziano per 6

6 _ _ _ _ $$P_4^{(2,2)} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{\cancel{4} \cdot 3 \cdot 2}{\cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 6$$

$$12 + 6 = \boxed{18}$$

231 Si estraggono tre carte da un mazzo di cinquantadue. Quante sono le possibili terne? Quante sono le terne formate da tre carte di cuori? Quante terne sono formate da una figura e due assi? [22100; 286; 72]

N° POSSIBILI TERNE $= \binom{52}{3} = \frac{52!}{3!\,49!} = \frac{52 \cdot \cancel{51}^{17} \cdot \cancel{50}^{25} \cdot \cancel{49!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{49!}} = \boxed{22100}$

N° POSSIBILI TERNE DI ♡ $= \binom{13}{3} = \frac{13!}{3!\,10!} = \frac{13 \cdot \cancel{12}^{2} \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{10!}} = \boxed{286}$

N° TERNE CON 1 FIGURA E 2 ASSI

$$12 \cdot \binom{4}{2} = 12 \cdot \frac{4!}{2 \cdot 2} = 12 \cdot \frac{\cancel{4} \cdot 3 \cdot 2}{\cancel{2} \cdot \cancel{2}} = \boxed{72}$$

265 Un'urna contiene 3 palline nere e 4 palline rosse. Vengono estratte 5 palline consecutivamente una dopo l'altra senza rimettere la pallina estratta nell'urna. Calcola quante sequenze di 5 palline si possono ottenere facendo riferimento solo al loro colore. Calcola inoltre quante di queste sequenze sono formate da 2 palline nere e 3 rosse. [25; 10]

POSSIBILI CONFIGURAZIONI:

1 PALLINA NERA

....

$$P_5^{(4)} = \frac{5!}{4!} = 5$$

2 PALLINE NERE

....

$$P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5\cdot 4}{2} = \boxed{10}$$

3 PALLINE NERE

....

$$P_5^{(3,2)} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$$

$$5 + 10 + 10 = \boxed{25}$$

226 In quanti modi si possono collocare cinque oggetti diversi in tre cassetti? [243]

OGGETTI A B C D E CASSETTI 1 2 3

Non ci sono condizioni, quindi anche tutti gli oggetti possono essere messi nello stesso cassetto

$$\begin{matrix} A & B & C & D & E \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{matrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{matrix} A & B & C & D & E \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{matrix}$$

Devo contare le sequenze del tipo

2 3 2 1 1
1 1 1 1 1
1 2 2 2 2
3 2 2 1 2
⋮

$$D'_{3,5} = 3^5 = \boxed{243}$$

229 Calcola in quanti modi si possono disporre cinque oggetti distinti in sette scatole diverse sapendo che vi possono essere scatole vuote. [16807]

$$\begin{matrix} A & B & C & D & E \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 7 & 3 & 5 & 2 \end{matrix}$$ oggetti, come prima

scatole 1 2 3 4 5 6 7

$$D'_{7,5} = 7^5 = \boxed{16807}$$

230 Calcola in quanti modi si possono sistemare in fila cinque bambine e quattro bambini se tutte le bambine vogliono stare vicine tra loro e lo stesso vale per tutti i bambini. [5760]

$F_1 F_2 F_3 F_4 F_5 M_1 M_2 M_3 M_4$

$F_2 F_4 F_5 F_1 F_3 M_3 M_1 M_4 M_2$

....

$$5! \cdot 4! \cdot 2 = \boxed{5760}$$

PERMUTAZIONI DELLE BAMBINE

PERMUTAZIONI DEI BAMBINI

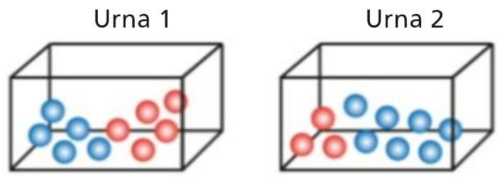
perché può essere prima il gruppo dei M e poi il gruppo F

272 Da ciascuna delle due urne in figura si estraggono contemporaneamente 2 palline.
Calcola quanti sono i gruppi costituiti da:

a. due palline rosse estratte dalla prima urna e due palline blu estratte dalla seconda;

b. una pallina rossa e una blu estratte da ciascuna urna;

c. tutte palline blu.



[a) 210; b) 525; c) 210]

Le palline sono tutte distinte (come se fossero numerate)

a) $\underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{estraz. dalla 1}^a\text{ urna}} \cdot \binom{7}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} \cdot \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3!}} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{2} \cdot \cancel{5!}} = \boxed{210}$

b) $\underbrace{5 \cdot 5}_{\text{estraz. dalla 1}^a\text{ urna}} \cdot \underbrace{3 \cdot 7}_{\text{estraz. dalla 2}^a\text{ urna}} = \boxed{525}$

c) $\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{2} = \ldots = \boxed{210}$

266 YOU & MATHS Six people – Bob, Bobbie, Rob, Robbie, Robert, and Roberta – are to be divided into two study groups. The groups cannot have any person in common, and each group must contain at least one person. In how many ways can this be done?

(USA *Bay Area Math Meet, BAMM, Bowl Sampler*)

[31]

A B C D E F

<u>1° MODO</u> gruppi da 3 e 3   A B C | D E F

Scelgo gruppi di 3 dall'insieme $\{A, B, C, D, E, F\}$

$$\frac{1}{2} \cdot \binom{6}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3!}} = 10$$

perché se scelgo 3 persone, ho automaticamente scelto anche l'altro gruppo

<u>2° MODO</u> gruppi da 2 e 4   A B || C D E F

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{2} \cdot \cancel{4!}} = 15$$

<u>3° MODO</u> gruppi da 1 e 5   A || B C D E F

$$\binom{6}{1} = 6$$

NUMERO TOTALE DI DIVISIONI IN GRUPPI $= 10 + 15 + 6 = \boxed{31}$

PROPRIETÀ DEI COEFF. BINOMIALI

VERIFICARE L'IDENTITÀ

149 $k \cdot \binom{n}{k} + (k-1) \cdot \binom{n}{k-1} = n \cdot \binom{n}{k-1}$

$$k \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + (k-1) \cdot \frac{n!}{(k-1)!\,\underbrace{(n-(k-1))!}_{(n-k+1)!}} = n \cdot \frac{n!}{(k-1)!\,(n-(k-1))!}$$

$$\frac{k \cdot n! \cdot (n-k+1) + k \cdot (k-1) \cdot n!}{k!\,(n-k+1)!} = //$$

$$\frac{k \cdot n!\left[n-\cancel{k}+\cancel{1}+\cancel{k}-\cancel{1}\right]}{k!\,(n-k+1)!} = //$$

$$\frac{\cancel{k} \cdot n! \cdot n}{\cancel{k} \cdot (k-1)!\,(n-k+1)!} = n \cdot \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}$$

OK!!