269 Un comitato di 5 persone deve essere scelto da un gruppo di 9. In quanti modi può essere scelto, se Biff e Jacob devono esservi compresi entrambi o essere entrambi esclusi, e Alice e Jane rifiutano di farne parte insieme?

(USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament*)

[41]

BIFF JACOB A B C D E ALICE JANE

1) CONTIAMO I GRUPPI IN CUI SONO PRESENTI BIFF E JACOB

a) BIFF JACOB + 3 fra A B C D E $\binom{5}{3}$

b) BIFF JACOB + ALICE + 2 fra ABCDE $\binom{5}{2}$

c) BIFF JACOB + JANE + 2 fra ABCDE $\binom{5}{2}$

numero gruppi in cui ci sono BIFF e JACOB $= \binom{5}{3} + \binom{5}{2} \cdot 2$

2) CONTIAMO I GRUPPI IN CUI NON SONO PRESENTI BIFF E JACOB

a) A B C D E (senza né Alice né Jane) 1

b) ALICE + 4 fra ABCDE $\binom{5}{4}$

c) JANE + 4 fra ABCDE $\binom{5}{4}$

numero di gruppi in cui non ci sono BIFF e JACOB $= 1 + \binom{5}{4} \cdot 2$

NUMERO DI GRUPPI $= \binom{5}{3} + \binom{5}{2} \cdot 2 + 1 + \binom{5}{4} \cdot 2 =$

$$= \frac{5!}{3!\,2!} + \frac{5!}{2!\,3!} \cdot 2 + 1 + 5 \cdot 2 =$$

$$= \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}} + \frac{5 \cdot 4}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} + 1 + 10 = 10 + 20 + 1 + 10 = \boxed{41}$$

85 Un'urna contiene 5 palline rosse e 85 nere. Calcola quanti sono i gruppi di 5 palline che contengono:

a. una rossa e quattro nere;

b. due rosse e tre nere;

c. tre rosse e due nere;

d. quattro rosse e una nera;

e. tutte rosse.

[a) 10 123 925; b) 987 700; c) 35 700; d) 425; e) 1]

Le palline sono tutte distinte (come se fossero numerate)

a) $\binom{5}{1}\cdot\binom{85}{4} = 5\cdot\frac{85!}{81!\,4!} = 5\cdot\frac{85\cdot \overset{7}{\cancel{\overset{21}{\cancel{84}}}}\cdot 83\cdot \overset{41}{\cancel{82}}\cdot\cancel{81!}}{\cancel{81!}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 10\,123\,925$

b) $\binom{5}{2}\cdot\binom{85}{3} = \frac{5!}{2!\,3!}\cdot\frac{85!}{3!\,82!} = \frac{5\cdot\overset{2}{\cancel{4}}\cdot\cancel{3!}}{\cancel{2}\cdot\cancel{3!}}\cdot\frac{85\cdot\overset{14}{\cancel{\overset{42}{\cancel{84}}}}\cdot 83\cdot\cancel{82!}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{82!}} = 987700$

c) $\binom{5}{3}\cdot\binom{85}{2} = \frac{5!}{3!\,2!}\cdot\frac{85!}{2!\,83!} = \frac{5\cdot\cancel{4}}{\cancel{2}}\cdot\frac{85\cdot 84}{\cancel{2}} = 35700$

d) $\binom{5}{4}\binom{85}{1} = 5\cdot 85 = 425$

e) $\binom{5}{5} = 1$

87 Da un mazzo di 40 carte vengono estratte contemporaneamente 6 carte. Calcola quanti sono i casi in cui:

a. escono esattamente due assi;

b. non esce nessun asso;

c. escono almeno tre assi;

d. esce al massimo un asso;

e. escono tre assi e tre fanti;

f. escono sei figure.

[a) 353 430; b) 1 947 792; c) 29 190; d) 3 455 760; e) 16; f) 924]

a) $\binom{4}{2}\cdot\binom{36}{4} = \frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{36!}{4!\,32!} = \frac{\cancel{4}\cdot 3\cdot 2}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}}\cdot\frac{\overset{9}{\cancel{36}}\cdot 35\cdot\overset{17}{\cancel{34}}\cdot\overset{11}{\cancel{33}}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 353430$

b) $\binom{36}{6} = \frac{36!}{6!\,30!} = \frac{\overset{6}{\cancel{36}}\cdot\overset{7}{\cancel{35}}\cdot\overset{17}{\cancel{34}}\cdot\overset{11}{\cancel{33}}\cdot\overset{8}{\cancel{32}}\cdot 31}{\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 1947792$

c) $\binom{4}{3}\cdot\binom{36}{3} + \binom{4}{4}\cdot\binom{36}{2} = 4\cdot\frac{36!}{3!\,33!} + 1\cdot\frac{36!}{2!\,34!} =$

$= 4\cdot\frac{\overset{6}{\cancel{36}}\cdot 35\cdot 34}{\cancel{3\cdot 2}} + \frac{\overset{18}{\cancel{36}}\cdot 35}{\cancel{2}} = 29190$

d) $\binom{4}{1}\cdot\binom{36}{5} + \binom{4}{0}\binom{36}{6} = 4\cdot\frac{36!}{5!\,31!} + 1\cdot\frac{36!}{6!\,30!} =$

$= \cancel{4}\cdot\frac{36\cdot\overset{7}{\cancel{35}}\cdot 34\cdot\overset{11}{\cancel{33}}\cdot\overset{16}{\cancel{32}}}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} + \frac{\overset{6}{\cancel{36}}\cdot\overset{7}{\cancel{35}}\cdot\overset{17}{\cancel{34}}\cdot\overset{11}{\cancel{33}}\cdot\overset{8}{\cancel{32}}\cdot 31}{\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} =$

$= 3455760$

e) $\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{3} = 4\cdot 4 = 16$

f) $\binom{12}{6} = \frac{12!}{6!\,6!} = \frac{\cancel{12}\cdot 11\cdot\overset{2}{\cancel{10}}\cdot\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\overset{2}{\cancel{8}}\cdot 7}{\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 924$

110 Una classe è formata da 28 alunni, di cui 16 femmine e 12 maschi. Fra le femmine c'è una sola «Maria» e fra i maschi un solo «Antonio». Si deve formare una delegazione formata da due femmine e due maschi. Quante sono le possibili delegazioni comprendenti «Maria» e «Antonio»?

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso di ordinamento, Sessione straordinaria*, 2006, *quesito* 10)

[165]

MARIA ANTONIO $\binom{15}{1}\cdot\binom{11}{1} = 15\cdot 11 = 165$