119 Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare $7! = 5040$ numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1 234 567 e 3 546 712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente, qual è il numero che occupa la settima posizione e quale quello che occupa la 5036-esima posizione e quale quello che occupa la 1441-esima posizione?

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso sperimentale, Sessione ordinaria*, 2013, *quesito* 6)

[1 235 467, 7 654 132, 3 124 567]

numero più piccolo (il 1° numero) 1 2 3 4 5 6 7

1 2 3 4 5 7 6

1 2 3 4 6 5 7

1 2 3 4 6 7 5

1 2 3 4 7 5 6

1 2 3 4 7 6 5

$\boxed{1\,2\,3\,5\,4\,6\,7}$ → numero che occupa la posizione 7

numeri che iniziano per 123 → 4!

numeri che iniziano per 12 → 5!

numeri che iniziano per 1 → 6! = 720

numeri che iniziano per 2 → 6! = 720

1440

Il numero che occupa la 1441-esima posizione è il primo che inizia per 3: $\boxed{3\,1\,2\,4\,5\,6\,7}$

Ultimo numero → 7 6 5 4 3 2 1   5040

vado a ritroso ↓

7 6 5 4 3 1 2   5039

7 6 5 4 2 3 1   5038

7 6 5 4 2 1 3   5037

$\boxed{7\,6\,5\,4\,1\,3\,2}$

207 Calcola in quanti modi diversi possiamo distribuire quattro tavolette di cioccolato a sei bambini, tenendo presente la possibilità di assegnare a qualche bambino più di una tavoletta. [126]

A B C D E F bambini

| | | | tavolette

$$\left.\begin{array}{cccc} A & A & A & A \\ A & D & D & E \\ C & C & D & F \\ E & E & E & F \\ & \vdots & & \end{array}\right\}$$ COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

SEGNAPOSTO

A D D E | □ □ □ | | □ | □

□ | | □ □ | □ □ | BBDF

$n=6$ $k=4$ ANAGRAMMI DI $n+k-1$ lettere con k e $n-1$ ripetizioni

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = \frac{9!}{4!\,5!} = \frac{9 \cdot \cancel{8}^{2} \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = \boxed{126}$$

208 In quanti modi possiamo collocare sei palline uguali in quattro urne? [84]

URNE 1 2 3 4 ○ ○ ○ ○ ○ ○

○○ □ ○ □ ○○ □ ○ 1 1 2 3 3 4

○ □ □ ○○○ □ ○○ 1 3 3 3 4 4

$$\frac{9!}{6!\,3!} = \frac{\cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8}^{4} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 84$$

$n=4$
$k=6$

$$C'_{4,6} = \binom{4+6-1}{6} = \frac{9!}{6!\,3!} = 84$$

209 In quanti modi possiamo mettere sei palline uguali in quattro urne in modo che nessuna risulti vuota? [10]

Prendo 4 palline e le metto in ciascuna urna. Poi distribuisco le rimanenti 2.

1 2 3 4   o o

o □ o □ □

o o □ □ □

$$\frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^{\,2} \cdot \cancel{3!}^{\,1}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3!}} = 10$$