**18** Un'urna contiene 4 palline rosse, 3 nere e 13 verdi. Viene estratta una pallina.
Calcola la probabilità che:

**a.** esca una pallina nera;
**b.** esca una pallina rossa;
**c.** esca una pallina verde;
**d.** non esca una pallina rossa;
**e.** esca una pallina gialla.

$\left[\text{a) } \frac{3}{20}; \text{ b) } \frac{1}{5}; \text{ c) } \frac{13}{20}; \text{ d) } \frac{4}{5}; \text{ e) } 0\right]$

4R 3N 13V = 20

a) $P(E_1) = \frac{3}{20}$

b) $P(E_2) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

c) $P(E_3) = \frac{13}{20}$

d) $E_R$ = "esce pallina ROSSA"

$P(\bar{E}_R) = 1 - P(E_R) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

e) $E_G = \emptyset$

$P(E_G) = 0$

**49** Si gettano contemporaneamente due dadi. Calcola la probabilità che le due facce:

**a.** siano due numeri uguali;
**b.** siano due numeri dispari;
**c.** siano due numeri primi;
**d.** siano un numero pari e l'altro dispari.

$\left[\text{a) } \frac{1}{6}; \text{ b) } \frac{1}{4}; \text{ c) } \frac{1}{4}; \text{ d) } \frac{1}{2}\right]$

SPAZIO DEI CASI ELEMENTARI

$U = \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots$
$\ldots, (6,4), (6,5), (6,6)\}$

$|U| = D'_{6,2} = 6^2 = 36$

a) $E$ = "escono due numeri uguali" $= \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

$|E| = 6$ $\quad P(E) = \frac{|E|}{|U|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

b) $E$ = "escono due numeri dispari" $= \{(1,1), (1,3), \ldots, (3,5), \ldots, (5,5)\}$

$|E| = 3 \cdot 3 = 9$ $\quad P(E) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

c) $|E| = 3 \cdot 3 = 9$ $\quad P(E) = \frac{1}{4}$

N. PRIMI = 2, 3, 5

d) $|E| = \underbrace{3}_{\text{3 PARI 1° DADO}} \cdot \underbrace{3}_{\text{3 DISP. 2° DADO}} + \underbrace{3}_{\text{3 DISP 1° DADO}} \cdot \underbrace{3}_{\text{3 PARI 2° DADO}} = 18$ $\quad P(E) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

**57** Un'urna contiene nove palline numerate da 1 a 9. Si estraggono consecutivamente due palline, senza rimettere la prima pallina estratta nell'urna. Calcola la probabilità che:

**a.** prima esca una pallina con un numero pari e poi una con un numero dispari;

**b.** le palline abbiano un numero pari e un numero dispari;

**c.** entrambe le palline abbiano un numero dispari.

[a) $\frac{5}{18}$; b) $\frac{5}{9}$; c) $\frac{5}{18}$]

$$|U| = D_{9,2} = 9 \cdot 8 = 72$$

a) $E_a = \{(2,1), (2,3), (2,5), \ldots, (8,7), (8,9)\}$

$|E_a| = 4 \cdot 5 = 20$ $\qquad P(E_a) = \frac{\cancel{4} \cdot 5}{9 \cdot \cancel{8}_2} = \frac{5}{18}$

b) $E_b = \{(2,1), (2,3), \ldots, (8,7), (8,9), (1,2), (3,2), \ldots, (7,8), (9,8)\}$

$P(E_b) = \frac{\cancel{4} \cdot 5 \cdot \cancel{2}}{9 \cdot \cancel{8}} = \frac{5}{9}$

c) $|E_c| = 5 \cdot 4$ $\qquad P(E_c) = \frac{5 \cdot \cancel{4}}{9 \cdot \cancel{8}_2} = \frac{5}{18}$

**60** Un'urna contiene 13 palline numerate da 1 a 13. Si estraggono contemporaneamente due palline. Calcola la probabilità che:

**a.** escano due numeri pari;

**b.** escano due numeri maggiori di 9;

**c.** escano un numero pari e uno dispari;

**d.** escano il numero 5 e uno qualunque degli altri numeri.

$\left[\text{a) } \frac{5}{26}; \text{ b) } \frac{1}{13}; \text{ c) } \frac{7}{13}; \text{ d) } \frac{2}{13}\right]$

ESTRAZIONE CONTEMPORANEA

$\Downarrow$

COMBINAZIONI

$$|U| = \binom{13}{2}$$

a) $E_a$ = "escono due PARI" $\quad |E_a| = \binom{6}{2}$

$$P(E_a) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{13}{2}} = \frac{\frac{6!}{2!\,4!}}{\frac{13!}{2!\,11!}} = \frac{\frac{6\cdot5}{\cancel{2}}}{\frac{13\cdot12}{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{6}\cdot5}{13\cdot\cancel{12}_{2}} = \frac{5}{26}$$

ALTERNATIVA EQUIVALENTE

Estrarre contemporaneamente è come estrarre 2 palline di seguito senza rimettere la 1ª estratta nell'urna $\Rightarrow$ DISPOSIZIONI SEMPLICI

$|U| = 13\cdot12 \qquad |E_a| = 6\cdot5 \qquad P(E_a) = \frac{6\cdot5}{13\cdot12} = \frac{5}{26}$

b) $|E_b| = \binom{4}{2}$

$$P(E_b) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{13}{2}} = \frac{\frac{4!}{2\cdot2}}{\frac{13!}{2\cdot11!}} = \frac{\frac{\cancel{4}\cdot\cancel{3}}{\cancel{2}}}{\frac{13\cdot\cancel{12}_{\cancel{3}}}{\cancel{2}}} = \frac{1}{13}$$

c) $|E_c| = 6\cdot7$

$$P(E_c) = \frac{6\cdot7}{\binom{13}{2}} = \frac{6\cdot7}{\frac{13\cdot\cancel{12}\,6}{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{6}\cdot7}{13\cdot\cancel{6}} = \frac{7}{13}$$

d) $|E_d| = 12$

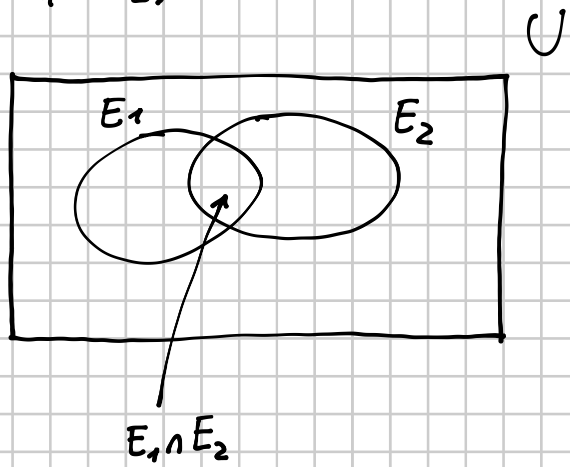
$$P(E_d) = \frac{12}{\binom{13}{2}} = \frac{\cancel{12}}{\frac{13\cdot\cancel{12}}{2}} = \frac{2}{13}$$

# SOMMA LOGICA DI EVENTI

$U$ = spazio dei casi elementari $\qquad E_1, E_2 \subseteq U$

SOMMA LOGICA = $E_1 \cup E_2$ = "si verifica $E_1$ o si verifica $E_2$"

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$




Se $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ gli eventi $E_1$ ed $E_2$ si dicono INCOMPATIBILI. In questo caso

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

**ESEMPIO**

Lancio di un dado $\qquad U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad |U| = 6$

$E_1$ = "esce un numero pari" $= \{2, 4, 6\}$

$E_2$ = "esce un numero dispari" $= \{1, 3, 5\}$

$E_3$ = "esce un numero primo" $= \{2, 3, 5\}$

$E_1 \cap E_2 = \emptyset$ $\quad E_1$ ed $E_2$ sono INCOMPATIBILI

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = 1$$

esce un numero pari
o un numero dispari

$$P(E_1 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

esce un numero pari
o primo

**82** Nel lancio di due dadi calcola la probabilità che il punteggio sia:

**a.** maggiore di 10 e divisibile per 3;

**b.** uguale a 4 o minore di 6;

**c.** dispari o multiplo di 3;

**d.** pari oppure non divisibile per 5.

$\left[\text{a) } \frac{1}{36}; \text{ b) } \frac{5}{18}; \text{ c) } \frac{2}{3}; \text{ d) } \frac{8}{9}\right]$

$|U| = 36$

a) $E_a = \{(6,6)\}$ unico punteggio possibile $= 12$ $\quad P(E_a) = \frac{1}{36}$

b) $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) =$

$E_1 =$ "uguale a 4" $\quad = \cancel{\frac{3}{36}} + \frac{10}{36} - \cancel{\frac{3}{36}} = \frac{5}{18}$

$E_2 =$ "minore di 6"

$E_1 = \{(2,2), (1,3), (3,1)\}$

$E_2 = \{(3,2), (2,3), (1,4), (4,1), (2,2), (1,3), (3,1), (1,2), (2,1), (1,1)\}$

$E_1 \cap E_2 = \{(2,2), (1,3), (3,1)\}$

c) $\underset{\text{DISPARI}}{E_1} = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), \dots\}$ $\quad |E_1| = 18$

$\underset{\text{MULT. DI 3}}{E_2} = \{\underbrace{(1,2), (2,1)}_{3}, \underbrace{(1,5)\ (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)}_{6},$

$\underbrace{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)}_{9}, \underbrace{(6,6)}_{12}\}$ $\quad |E_2| = 12$

$E_1 \cap E_2 = \{(1,2), (2,1), (3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}$ $\quad |E_1 \cap E_2| = 6$

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{18}{36} + \frac{12}{36} - \frac{6}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

d) $E_1 =$ "punteggio pari" $\qquad |E_1| = 18$

$E_2 =$ "punteggio non div. per 5"

$$\overline{E_2} = \text{"punt. divisibile per 5"} = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),\underbrace{(4,6),(5,5),(6,4)}\}$$

$|\overline{E_2}| = 7 \qquad |E_2| = 36 - 7 = 29$

$E_1 \cap E_2 =$ "punteggio pari e non div. per 5" $\qquad |E_1 \cap E_2| = 18 - 3 = 15$

dai PARI tolgo
quelli non divisibili per 5

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) =$$

$$= \frac{18}{36} + \frac{29}{36} - \frac{15}{36} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

**83** Estraendo una carta da un mazzo di 52, calcola la probabilità che:

a. sia un 3 o una figura;

b. sia un 5 o una carta rossa;

c. non sia né un 4 né una carta di cuori.

$\left[\text{a) } \frac{4}{13}; \text{ b) } \frac{7}{13}; \text{ c) } \frac{9}{13}\right]$

$|U| = 52$

a) $E_1$ = "esce un 3" $|E_1| = 4$ $E_2$ = "esce una figura" $|E_2| = 12$

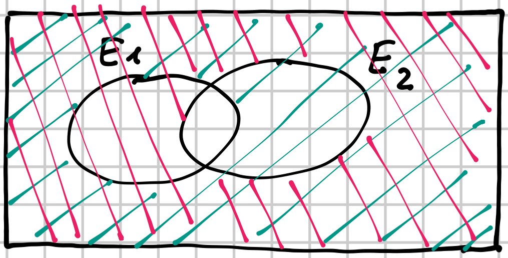
$E_1 \cap E_2 = \emptyset$ INCOMPATIBILI

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{4}{52} + \frac{12}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

b) $E_1$ = "esce un 5" $|E_1| = 4$ $E_2$ = "esce una carta rossa" $|E_2| = 26$

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{4}{52} + \frac{26}{52} - \frac{2}{52} = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$$

c) $\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 = \overline{E_1 \cup E_2}$




$E_1$ = "esce un 4"

$E_2$ = "esce una carta di cuori"

$$P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2) = P(\overline{E_1 \cup E_2}) = 1 - P(E_1 \cup E_2) = 1 - [P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)]$$

$$= 1 - \left[\frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52}\right] = 1 - \frac{16}{52} = 1 - \frac{4}{13} = \frac{13-4}{13} = \frac{9}{13}$$