PROBABILITÀ CONDIZIONATA

$E_1, E_2 \subseteq U$ EVENTI $\qquad P(E_1) \neq 0$

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)}$$

PROBABILITÀ DI E_2 CONDIZIONATO E_1

probabilità che si verifichi E_2 sapendo che E_1 si è già verificato

$$\Rightarrow \quad P(E_2 \cap E_1) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1)$$

$$P(E_2 \cap E_1) = P(E_1 \cap E_2)$$

2 eventi E_1, E_2 si dicono (STOCASTICAMENTE) INDIPENDENTI se

$$P(E_2|E_1) = P(E_2) \qquad (\text{e anche } P(E_1|E_2) = P(E_1))$$

In questo caso

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

140 Si hanno due urne. La prima contiene 4 palline bianche e 6 rosse, la seconda ne contiene 3 bianche e 5 rosse. Si estrae una pallina dalla prima urna e la si inserisce nella seconda, e poi si estrae una pallina dalla seconda urna. Calcola la probabilità che le palline estratte siano:

a. entrambe bianche;

b. bianca dalla prima urna e rossa dalla seconda;

c. una bianca e una rossa.

$\left[\text{a) } \frac{8}{45}; \text{ b) } \frac{2}{9}; \text{ c) } \frac{19}{45}\right]$

$\boxed{1}$	$\boxed{2}$
4B	3B
6 R	5R

a) $E_1 =$ "B dalla 1" $E_2 =$ "B dalla 2"

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1) = \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{10}_{5}} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{45}$$

b) $E_1 =$ "B dalla 1" $E_2 =$ "R dalla 2"

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1) = \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{10}_{\cancel{5}}} \cdot \frac{\cancel{5}}{9} = \frac{2}{9}$$

c) $E_1 =$ "R dalla 1" $E_2 =$ "R dalla 2"

$$\underbrace{P(E_1 \cap E_2)}_{\text{entrambe R}} = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1) = \frac{\cancel{6}^{\cancel{3}}}{\cancel{10}_{5}} \cdot \frac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{9}_{\cancel{3}}} = \frac{2}{5}$$

$$\underbrace{P(E)}_{\text{una bianca e una rossa}} = 1 - \underbrace{P(\bar{E})}_{\text{entrambe rosse o entrambe bianche}} = 1 - \frac{2}{5} - \frac{8}{45} = \frac{45 - 18 - 8}{45} = \frac{19}{45}$$

PROVE RIPETUTE

n PROVE

p = probabilità di 1 successo

q = prob. di 1 insuccesso $= 1 - p$

$$P(K \text{ successi}) = \binom{n}{K} p^K q^{n-K}$$

156 Una rilevazione statistica ha messo in evidenza che 7 persone su 10 utilizzano in un mese surgelati di pesce. Calcola la probabilità che, scegliendo a caso 4 persone, almeno una abbia nel corso del mese consumato questo tipo di prodotto. [0,9919]

$n = 4$ $\quad p = \frac{7}{10}$ prob. che 1 persona abbia consumato pesce surgelato

$q = \frac{3}{10}$

E = "almeno 1 persona abbia consumato pesce surg."

$$P(E) = P(1 \text{ successo}) + P(2 \text{ successi}) + P(3 \text{ successi}) + P(4 \text{ successi}) =$$

$$= \binom{4}{1}\left(\frac{7}{10}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3 + \binom{4}{2}\left(\frac{7}{10}\right)^2\left(\frac{3}{10}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^1 + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^0 =$$

$$= 4 \cdot \frac{7 \cdot 3^3}{10^4} + \frac{\cancel{4} \cdot 3 \cdot 2}{\cancel{2} \cdot \cancel{1}} \frac{7^2 \cdot 3^2}{10^4} + 4 \frac{7^3 \cdot 3}{10^4} + 1 \cdot \frac{7^4}{10^4} =$$

$$= \frac{7}{10^4}\left(4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 7 \cdot 3^2 + 4 \cdot 7^2 \cdot 3 + 7^3\right) = 0,9919$$

Si poteva anche risolvere con la probabilità dell'evento contrario

$$P(E) = 1 - P(0 \text{ successi}) = 1 - \binom{4}{0}\left(\frac{7}{10}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^4 = 1 - \frac{3^4}{10^4} = 0,9919$$

TEOREMA DI BAYES

177 Abbiamo tre urne. La prima contiene 2 palline bianche e 3 rosse, la seconda 5 bianche e 3 rosse e la terza 4 bianche e 2 rosse. Scegliamo a caso un'urna ed estraiamo una pallina. Viene estratta una pallina bianca. Calcola la probabilità che la pallina estratta provenga dalla seconda urna. $\left[\frac{75}{203}\right]$

$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$
2B	5B	4B
3R	3R	2R

E_1 = "scelta dell'urna 1"

E_2 = "scelta dell'urna 2"

E_3 = "scelta dell'urna 3"

E = "estratta 1 pallina B"

$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$

$$P(E_2|E) = \frac{P(E_2)\cdot P(E|E_2)}{P(E_1)\cdot P(E|E_1) + P(E_2)\cdot P(E|E_2) + P(E_3)\cdot P(E|E_3)} =$$

$$= \frac{\cancel{\frac{1}{3}}\cdot\frac{5}{8}}{\cancel{\frac{1}{3}}\cdot\frac{2}{5} + \cancel{\frac{1}{3}}\cdot\frac{5}{8} + \cancel{\frac{1}{3}}\cdot\frac{4}{6}} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{2}{5}+\frac{5}{8}+\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{\frac{5}{8}}{\frac{2\cdot 8\cdot 3 + 5^2\cdot 3 + 2\cdot 5\cdot 8}{5\cdot 8\cdot 3}} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{203}{5\cdot 8\cdot 3}} =$$

$$= \frac{5}{\cancel{8}}\cdot\frac{5\cdot\cancel{8}\cdot 3}{203} = \frac{75}{203}$$