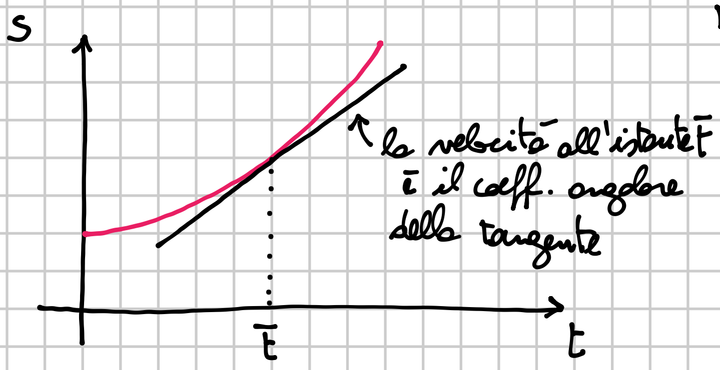
DERIVATE E INTEGRALI IN FISICA

Consideriamo un punto materiale che si muove su una retta, con legge oraria

$$S = S(t)$$ POSIZIONE IN FUNZIONE DEL TEMPO (fissato un S.R.)



VELOCITÀ ISTANTANEA

$$v = v(t) = \frac{ds}{dt}$$ derivata della posizione rispetto al tempo

ACCELERAZIONE (ISTANTANEA)

$$a = a(t) = \frac{dv}{dt}$$ derivata della velocità rispetto al tempo

$$= \frac{d^2 s}{dt^2}$$ è la derivata SECONDA della posizione rispetto al tempo

ESEMPIO: MOTO RETT. UNIF. ACCELERATO

$$S = S(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + s_0$$

$$v = v(t) = \frac{ds}{dt} = at + v_0$$

$$a = a(t) = \frac{dv}{dt} = a$$

TH. FONDAMENTALE DEL CALCOLO $$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

AREA CERCHIO

DERIVATA

πr^2

LUNGHEZZA CIRCONFERENZA

$2\pi r$

VOLUME SFERA

DERIVATA (RISP. A r)

$\frac{4}{3}\pi r^3$

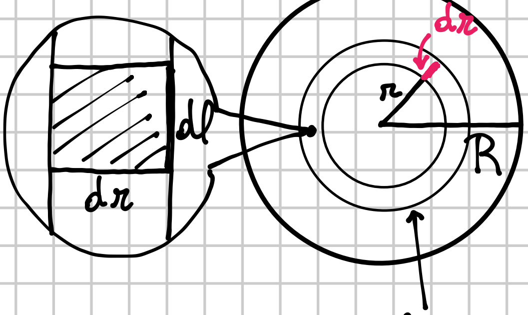
AREA SUPERFICIE SFERICA

$4\pi r^2$

Ricaviamo la formula dell'area del cerchio a partire dalla formula della lunghezza della circonferenza

RAGGIO R

ZOOM



$0 \leq r \leq R$

dr = "spessore" infinitesimo della corona circolare

dl = pezzettino infinitesimo di circonferenza

il cerchio viene visto come unione di corone circolari sempre più grandi

$$dA = dr \cdot dl \implies \text{area di TUTTA la corona circolare (infinitesima)} = \int dr \cdot dl = dr \cdot \overbrace{\int dl}^{2\pi r} = 2\pi r \, dr$$

(dA: area del pezzettino di corona circolare)

$$\text{AREA CERCHIO} = \text{SOMMA DI TUTTE LE AREE DELLE CORONE CIRCOLARI CON } 0 \leq r \leq R = \int_0^R 2\pi r \, dr = \int_0^R (\pi r^2)' \, dr \stackrel{*}{=} \pi R^2 - \pi \cdot 0^2 = \pi R^2$$

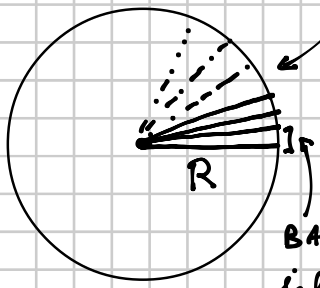
* applico il TH. FOND. DEL CALCOLO

TH. FONDAMENTALE DEL CALCOLO

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

Si poteva vedere anche così:

cerchio composto da infiniti settori circolari infinitesimi

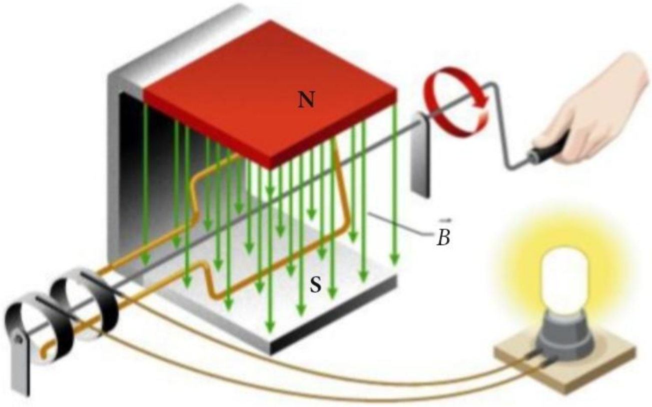


AREA DI UN SETTORE $= \frac{1}{2} R\,dl$

BASE dl infinitesima

$$\text{AREA CERCHIO} = \int \frac{1}{2} R\,dl = \frac{1}{2} R \underbrace{\int dl}_{\text{lunghezza della circonferenza}} = \frac{1}{2} R \cdot 2\pi R = \pi R^2$$

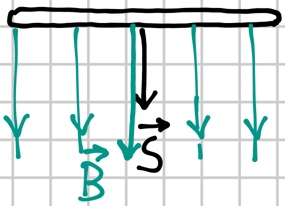
75 **CON LE DERIVATE E GLI INTEGRALI** Una spira quadrata di lato 12 cm e resistenza di 5,0 Ω è immersa in un campo magnetico uniforme di 0,23 T. Al tempo $t = 0$ s, il piano individuato dalla spira è perpendicolare al campo magnetico.

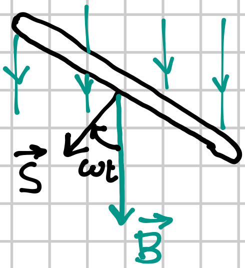


▶ Calcola la carica totale che fluisce nella spira in mezzo giro, cioè tra $t = 0$ s e $t = \pi/\omega$.

[1,3 mC]

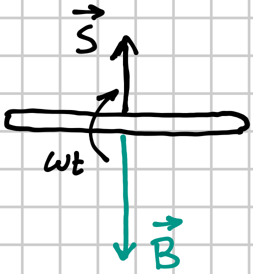
$t = 0\,s$





$t = \frac{\pi}{\omega}$

$\omega t = \pi \Rightarrow$



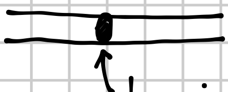
$$i(t) = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}(BS\cos\omega t) = -\frac{BS}{R}\frac{d}{dt}(\cos\omega t) =$$

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS\cdot\cos\omega t$$

$$= -\frac{BS}{R}(-\omega\sin\omega t) =$$

$$= \frac{BS\omega}{R}\sin\omega t$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$



$dq = i\,dt$ carica che passa attraverso la sezione nel tempo dt

$$Q_{TOT} = \int dq = \int_0^{\pi/\omega} i\,dt = \int_0^{\pi/\omega}\frac{BS\omega}{R}\sin\omega t\,dt =$$

$$= \frac{BS}{R}\int_0^{\pi/\omega}\omega\sin\omega t\,dt = \frac{BS}{R}\int_0^{\pi/\omega}(-\cos\omega t)'\,dt =$$

APPLICO IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

$$= \frac{BS}{R}\left[-\cos\left(\omega\cdot\frac{\pi}{\omega}\right) - \left(-\cos(\omega\cdot 0)\right)\right] = \frac{BS}{R}\left[-\underbrace{\cos\pi}_{-1} + \underbrace{\cos 0}_{1}\right] =$$

$$= \frac{BS}{R}[1+1] = \frac{2BS}{R} = \frac{2(0{,}23\,T)(0{,}12\,m)^2}{5{,}0\,\Omega} = 0{,}0013248\,C \simeq \boxed{1{,}3\,mC}$$