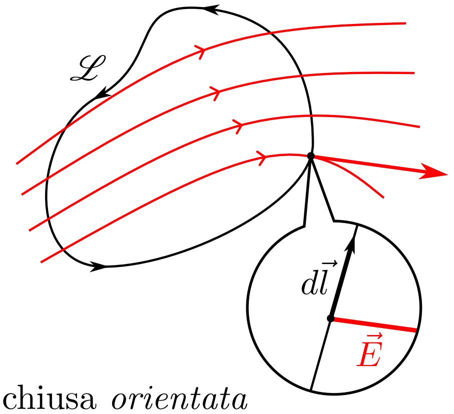
Circuitazione e forza elettromotrice

1 La circuitazione di $\vec{E}$

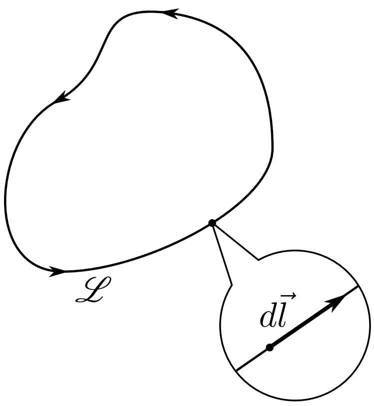


$\mathscr{L}$ = linea chiusa *orientata*

$$\Gamma_{\mathscr{L}}(\vec{E}) = \oint_{\mathscr{L}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

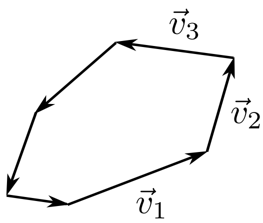
Il vettore $d\vec{l}$ (infinitesimo) segue l'orientazione della curva $\mathscr{L}$

2 Integrali di linea (casi particolari)



$$\oint_{\mathscr{L}} d\vec{l} = \vec{0}$$

corrisponde alla somma di tutti i $d\vec{l}$, che sono vettori!

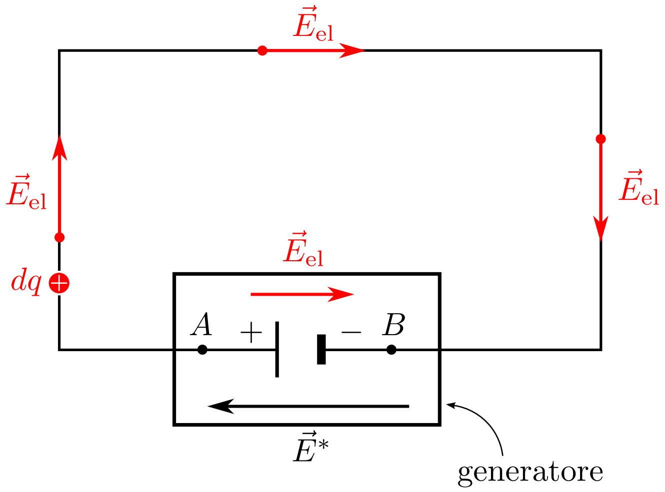


$$\sum \vec{v}_i = \vec{0}$$

$$dl = \left|d\vec{l}\right| = \text{modulo di } d\vec{l}$$

$$\oint_{\mathscr{L}} dl = \oint_{\mathscr{L}} \left|d\vec{l}\right| = \text{lunghezza della linea } \mathscr{L}$$

3 Approfondimenti sulla forza elettromotrice

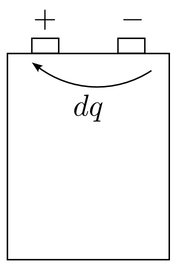


$\vec{E}_{\mathrm{el}}$ = CAMPO ELETTROSTATICO (conservativo)

$\vec{E}^*$ = CAMPO ELETTROMOTORE (non conservativo) in una pila, ad es., è generato da una reazione chimica

Forza elettromotrice (fem) → è il rapporto fra il lavoro W_g che il generatore compie per spostare *al suo interno* una carica $dq > 0$ dal polo − al polo + e la carica dq stessa

È (numericamente) uguale al lavoro del campo elettromotore sull'unità di carica



$$\left|\vec{E}^*\right| > \left|\vec{E}_{\mathrm{el}}\right| \qquad \text{all'interno del generatore}$$

$$\left|\vec{E}^*\right| = 0 \qquad \text{all'esterno del generatore}$$

Per definizione si ha

$$\mathrm{fem} = \frac{W_g}{dq} = \frac{\displaystyle\int_B^A dq\vec{E}^* \cdot d\vec{l}}{dq} = \int_B^A \vec{E}^* \cdot d\vec{l}$$

Inoltre, ponendo $\vec{E} = \vec{E}_{\mathrm{el}} + \vec{E}^*$ (campo elettrico totale)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}_{\mathrm{el}} \cdot d\vec{l} + \int_B^A (\vec{E}_{\mathrm{el}} + \vec{E}^*) \cdot d\vec{l} =$$

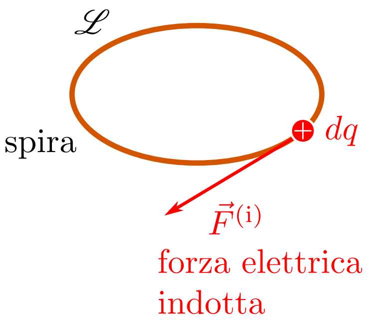
$$= \int_A^B \vec{E}_{\mathrm{el}} \cdot d\vec{l} + \int_B^A \vec{E}_{\mathrm{el}} \cdot d\vec{l} + \int_B^A \vec{E}^* \cdot d\vec{l} =$$

$$= \underbrace{\oint \vec{E}_{\mathrm{el}} \cdot d\vec{l}}_{\substack{= 0 \text{ perché } \vec{E}_{\mathrm{el}} \\ \text{è conservativo}}} + \int_B^A \vec{E}^* \cdot d\vec{l} = \int_B^A \vec{E}^* \cdot d\vec{l}$$

quindi

$$\boxed{\mathrm{fem} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

4 Induzione elettromagnetica



$\Phi(\vec{B})$ sta variando

$$\vec{E}^{(\mathrm{i})} = \frac{\vec{F}^{(\mathrm{i})}}{dq}$$

campo elettrico indotto

NON È CONSERVATIVO

forza elettromotrice indotta

$$\mathrm{fem}^{(\mathrm{i})} = \oint_{\mathscr{L}} \vec{E}^{(\mathrm{i})} \cdot d\vec{l} = \Gamma_{\mathscr{L}}\big(\vec{E}^{(\mathrm{i})}\big) \neq 0$$

La $\mathrm{fem}^{(\mathrm{i})}$ si può pensare "distribuita" lungo tutto il percorso $\mathscr{L}$

5 Legge di Faraday-Neumann-Lenz

La legge di Faraday-Neumann-Lenz si può riscrivere senza riferirsi a un circuito di filo conduttore

$$\oint_{\mathscr{L}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

Infatti il campo elettrico esiste indipendentemente dalle cariche che scorrono nel circuito

$$\boxed{\Gamma_{\mathscr{L}}(\vec{E}) = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}}$$

equazione di Maxwell

circuitazione calcolata rispetto a una linea chiusa (orientata) $\mathscr{L}$ qualsiasi

derivata del flusso concatenato alla stessa $\mathscr{L}$

Questa legge lega tra di loro il campo elettrico e il campo magnetico e possiamo affermare che

$\boxed{\text{un campo magnetico variabile dà origine a un campo elettrico indotto}}$

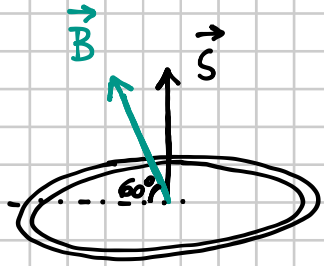
6 ◆◆◆ Una spira circolare di raggio 2,9 cm è immersa in un campo magnetico uniforme di valore $6{,}8 \times 10^{-6}$ T, le cui linee di campo formano un angolo di 60° con il piano della spira.

- Determina il modulo della circuitazione di $\vec{E}$ lungo un cammino che coincide con la spira circolare.

A partire dall'istante $t = 0$ s, il valore del campo magnetico diminuisce progressivamente fino a raggiungere l'intensità di $9{,}7 \times 10^{-7}$ T all'istante $t_1 = 15$ s.

- Determina il modulo della circuitazione media di $\vec{E}$ lungo un cammino che coincide con la spira circolare durante l'intervallo di tempo in cui il campo magnetico diminuisce di valore.

$\left[0\,\frac{N}{C}\cdot m; 8{,}9 \times 10^{-10}\,\frac{N}{C}\cdot m\right]$



$$\left|\Gamma_\mathcal{L}(\vec{E})\right| = \left|\oint_\mathcal{L} \vec{E}\cdot d\vec{l}\right| = \left|-\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}\right| = 0\ \frac{N}{C}\cdot m$$

perché il flusso non sta variando ($\vec{B}$ uniforme)

TROVIAMO UN VALORE MEDIO

$$\left|\Gamma_\mathcal{L}(\vec{E})\right| = \left|\oint_\mathcal{L} \vec{E}\cdot d\vec{l}\right| \cong \left|-\frac{\Phi_2(\vec{B}) - \Phi_1(\vec{B})}{\Delta t}\right| =$$

$$= \left|-\frac{B_2 S\cos 30° - B_1 S \cos 30°}{\Delta t}\right| = \frac{S\cos 30°}{\Delta t}(B_1 - B_2) =$$

$$= \frac{\pi r^2 \cos 30° (B_1 - B_2)}{\Delta t} = \frac{\pi (2{,}9\times 10^{-2} m)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(68 - 9{,}7)\times 10^{-7}\,T}{15\ s} =$$

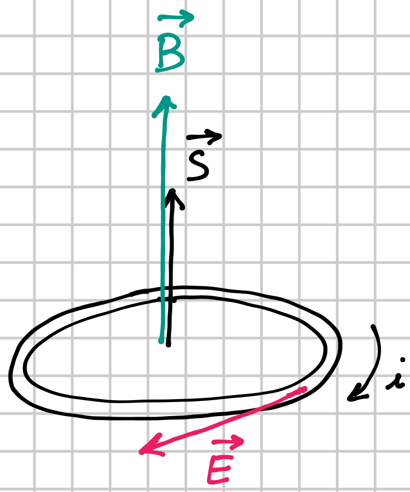
$$= 88{,}93\ldots \times 10^{-11}\ \frac{N}{C}\cdot m \simeq \boxed{8{,}9\times 10^{-10}\ \frac{N}{C}\cdot m}$$

CIRCUITAZIONE MEDIA

7 Una spira circolare di raggio 12 cm è immersa in un campo magnetico uniforme di intensità $B_1 = 1{,}2 \times 10^{-6}$ T perpendicolare alla sua superficie. Il modulo del campo magnetico viene progressivamente aumentato fino al valore di $B_f = 8{,}4 \times 10^{-6}$ T e nel processo viene indotto nella spira un campo elettrico con modulo di valore medio $2{,}2 \times 10^{-8}$ N/C.

▸ In quale intervallo di tempo è avvenuta la variazione di intensità del campo magnetico per ottenere questo campo elettrico medio?

[$\Delta t = 20$ s]



$$\Gamma_{\mathcal{L}}(\vec{E}) = -\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t}$$

$$\left|\oint_{\mathcal{L}} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}\right| = \frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t}$$

$$\oint_{\mathcal{L}} E\,d\ell = \frac{B_f \cdot S - B_i \cdot S}{\Delta t}$$

$$E\oint_{\mathcal{L}} d\ell = \frac{S(B_f - B_i)}{\Delta t}$$

$$E\,2\pi r = \frac{S(B_f - B_i)}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{S(B_f - B_i)}{2\pi r E} =$$

$$= \frac{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}(B_f - B_i)}{2\cancel{\pi}\cancel{r}E} =$$

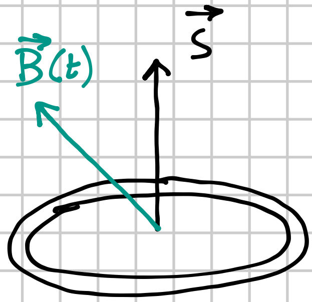
$$= \frac{r(B_f - B_i)}{2E} = \frac{(12\times 10^{-2}\,m)(8{,}4 - 1{,}2)\times 10^{-6}\,T}{2\left(2{,}2\times 10^{-8}\,\frac{N}{C}\right)} =$$

$$= 19{,}63\ldots\,s \simeq \boxed{20\,s}$$

10 ◆◆◆ **CON LE DERIVATE** Una spira circolare si trova immersa in un campo magnetico uniforme inclinato di 45° rispetto al suo asse. La spira ha un raggio di $7{,}4 \times 10^{-4}$ m e il modulo del campo magnetico varia secondo la legge $B(t) = b_0\, t^2$ con $b_0 = 5{,}0 \times 10^{-6}\ \dfrac{\text{T}}{\text{s}^2}$.

- ▶ Determina il modulo della circuitazione del campo elettrico al variare del tempo lungo un cammino che coincide con la spira circolare.
- ▶ Determina il modulo del campo elettrico indotto all'istante $t = 2{,}0$ s.

$$\left[\left(1{,}2 \times 10^{-11}\,\frac{m^2 T}{s^2}\right)t;\ 5{,}2 \times 10^{-9}\,\frac{\text{N}}{\text{C}}\right]$$



$$B(t) = b_0 t^2$$

$$\left|\oint_{\mathcal{L}} \vec{E}\cdot d\vec{l}\,\right| = \left| -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \right|$$

$$\Phi(\vec{B}) = B(t)\cdot S\cdot \cos 45° =$$

$$= b_0 t^2 \cdot \pi r^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\pi r^2 b_0 \sqrt{2}}{2}\, t^2$$

$$\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \frac{\pi r^2 b_0 \sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} t =$$

$$= \pi r^2 b_0 \sqrt{2}\, t$$

$$|\Gamma_{\mathcal{L}}(\vec{E})| =$$

$$= \pi\left(7{,}4\times 10^{-4}\,m\right)^2\left(5{,}0\times 10^{-6}\,\frac{T}{s^2}\right)\sqrt{2}\cdot t$$

$$= \left(1216{,}4\ldots \times 10^{-14}\,\frac{T\cdot m^2}{s^2}\right)t$$

$$\simeq \left(1{,}2\times 10^{-11}\,\frac{T\cdot m^2}{s^2}\right)t$$

MODULO DELLA CIRCUITAZIONE ALL'ISTANTE t

$$E\cdot 2\pi r = \left(1{,}2164\ldots \times 10^{-11}\,\frac{T\cdot m^2}{s^2}\right)\cdot(2{,}0\,s)$$

$$E = \frac{\left(1{,}2164\ldots\times 10^{-11}\,\frac{T\cdot m^2}{s^2}\right)(2{,}0\,s)}{2\pi\left(7{,}4\times 10^{-4}\,m\right)} =$$

$$= 0{,}0523\ldots \times 10^{-7}\,\frac{N}{C} \simeq \boxed{5{,}2\times 10^{-9}\,\frac{N}{C}}$$