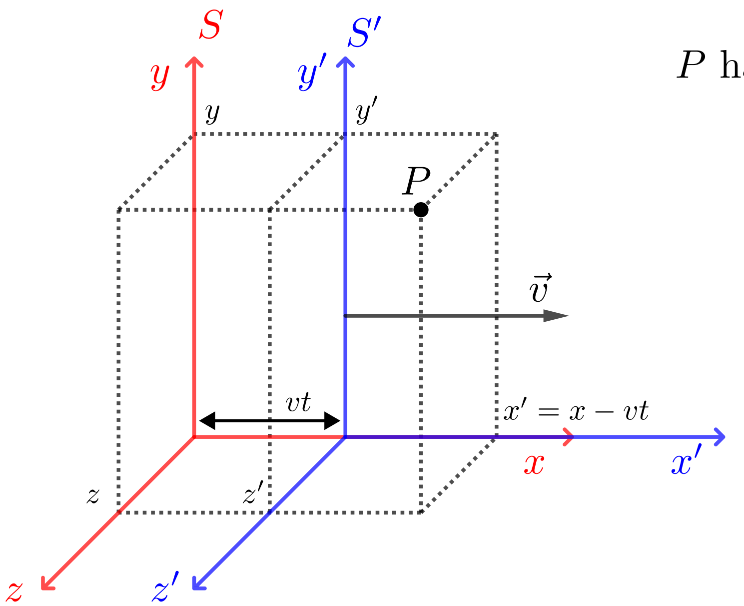
Trasformazioni di Lorentz

Premessa: trasformazioni di Galileo



P ha coordinate $\begin{cases} \text{in } S \rightsquigarrow P(x,y,z,t) \\ \text{in } S' \rightsquigarrow P(x',y',z',t') \end{cases}$

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

tempo assoluto
(meccanica newtoniana)

S' si muove con velocità $\vec{v}$ costante rispetto a S nella direzione dell'asse x (verso positivo).

All'istante iniziale $t = t' = 0$ i due S.R.I. coincidono.

$u =$ velocità di P in S
$u' =$ velocità di P in S'

$$x' = x - vt \qquad t' = t$$

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v$$

$$u' = u - v$$

costante

$$a' = a$$

$$F' = ma' = ma = F$$

Relatività galileiana (newtoniana)

Le leggi della meccanica sono le stesse in tutti i S.R.I.

Nessun esperimento di meccanica eseguito in un solo S.R.I. può mettere in evidenza lo stato di moto di quel sistema rispetto a un altro S.R.I.

differenti velocità, energie cinetiche, quantità di moto…

ma *tutti* concordano sulle *leggi*, ad es. la conservazione dell'energia meccanica, la conservazione della quantità di moto negli urti, …

Elettromagnetismo → il principio di relatività galileiana non vale più:

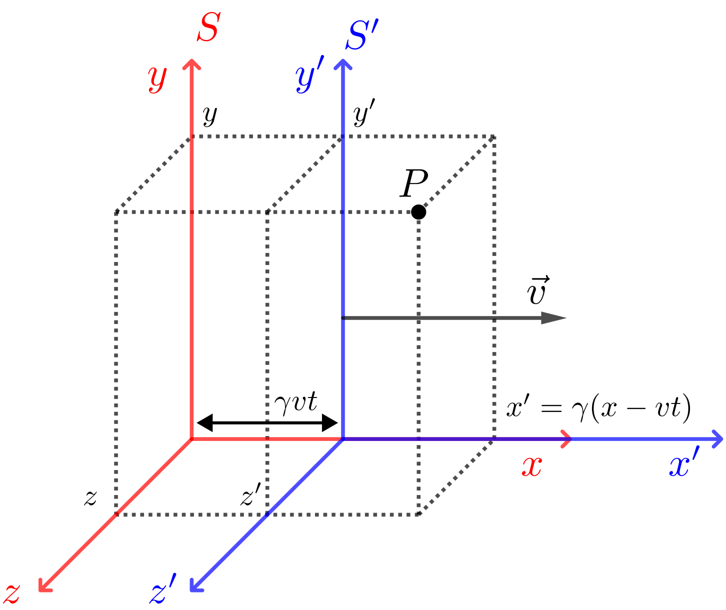
le equazioni di Maxwell *non* sono invarianti per trasformazioni di Galileo

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

la velocità della luce nel vuoto *non* è invariante per trasformazioni di Galileo

Ipotesi di esistenza dell'etere, cioè di un S.R. privilegiato rispetto al quale la velocità della luce è c (posizione prevalente degli inizi del '900)

Trasformazioni di Lorentz (1904)



$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{\beta}{c}\,x\right) \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

Se fosse $c = \infty$, allora   TR. DI GALILEO $\equiv$ TR. DI LORENTZ

In realtà

$$v \ll c \quad \Longrightarrow \quad \frac{\beta}{c} = \frac{v}{c^2} \to 0 \qquad \frac{\beta}{c}\,x \to 0 \qquad \gamma \to 1$$

molto minore

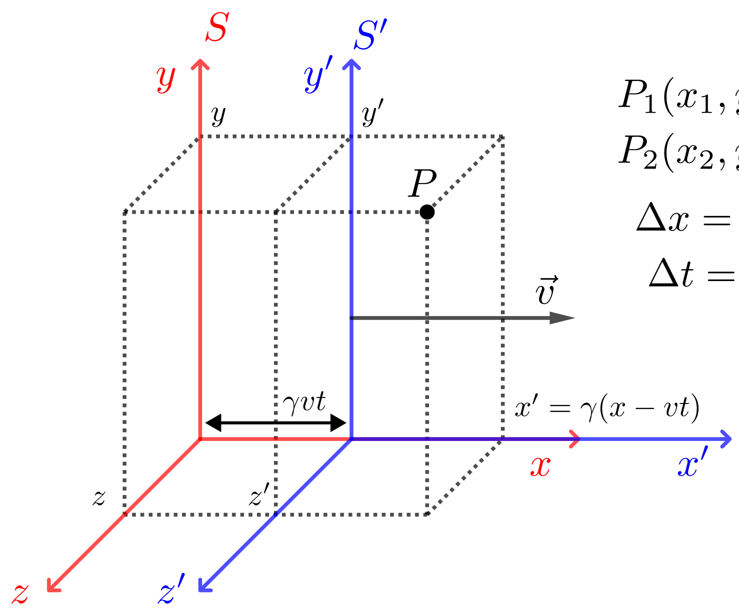
(se x non è
"troppo grande")

e in pratica le trasformazioni di Lorentz diventano le trasformazioni di Galileo

Le equazioni di Maxwell sono *covarianti* per trasformazioni di Lorentz

- Lorentz introdusse queste trasformazioni per spiegare il fallimento della ricerca dell'etere e per mantenere la covarianza delle equazioni di Maxwell
- Einstein le reinterpretò come una manifestazione fondamentale della struttura dello spazio-tempo, derivandole direttamente dai suoi postulati della relatività ristretta

Dilatazione dei tempi



$$\begin{array}{ccc} S & & S' \\ P_1(x_1, y_1, z_1, t_1) & \rightsquigarrow & P_1(x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) \\ P_2(x_2, y_2, z_2, t_2) & \rightsquigarrow & P_2(x'_2, y'_2, z'_2, t'_2) \\ \Delta x = x_2 - x_1 & & \Delta x' = x'_2 - x'_1 \\ \Delta t = t_2 - t_1 & & \Delta t' = t'_2 - t'_1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{\beta}{c}\,x\right) \end{cases} \implies \begin{cases} \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \\ \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \dfrac{\beta}{c}\,\Delta x\right) \end{cases}$$

Se due eventi A e B avvengono nella stessa posizione rispetto a S, si ha che

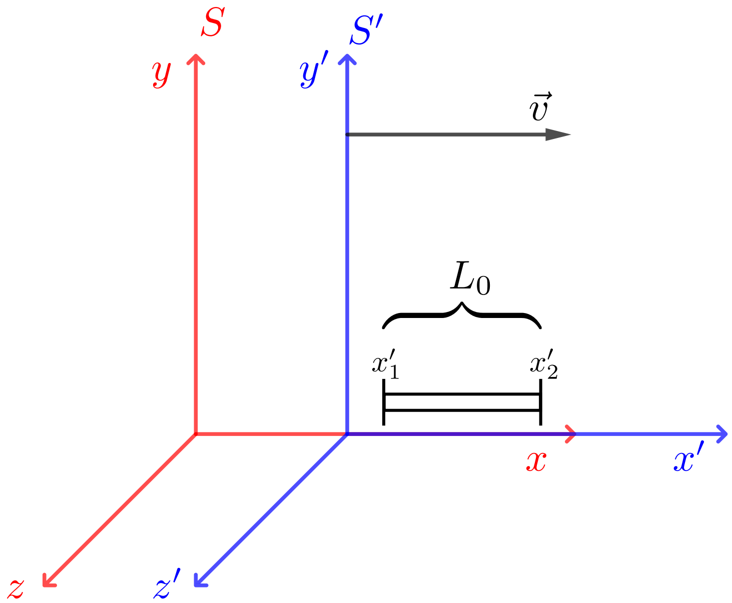
$$\Delta x = 0 \text{ e } \Delta t \text{ è tempo proprio}$$

In S' si ha che

$$\Delta t' = \gamma \Delta t$$

tempo proprio

Contrazione delle lunghezze (contrazione di Lorentz)



$$\begin{cases} \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \\ \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \dfrac{\beta}{c}\,\Delta x\right) \end{cases}$$

$L_0 =$ lunghezza propria della sbarra in S'

$L_0 = x_2' - x_1' = \Delta x'$

In S, che vede l'asta in moto con velocità v, si devono determinare le posizioni delle sue estremità x_1 e x_2 *simultaneamente*

evento $A = 1^\circ$ estremo dell'asta in x_1 all'istante t

evento $B = 2^\circ$ estremo dell'asta in x_2 all'istante t

$L =$ lunghezza valutata da $S = x_2 - x_1 = \Delta x \qquad \Delta t = 0$

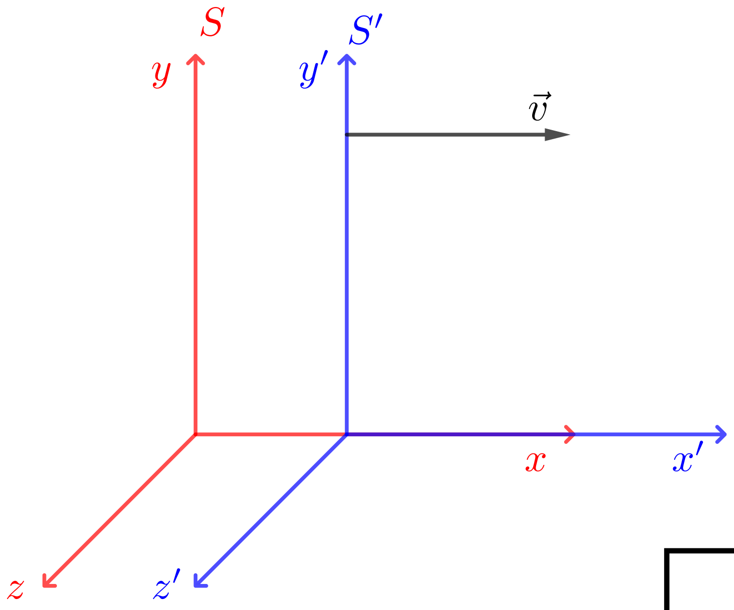
$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\underbrace{\Delta t}_{=0}) \quad \Longrightarrow \quad \Delta x' = \gamma \Delta x$$

Dunque si ha che

lunghezza propria

$$L_0 = \gamma L \quad \Longrightarrow \quad L = \frac{L_0}{\gamma}$$

Trasformazioni di Lorentz inverse



$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{\beta}{c}\, x\right) \end{cases}$$

PER SIMMETRIA
(sostituisco v con $-v$)

TR. INVERSE
$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{\beta}{c}\, x'\right) \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

modulo di $\vec{v}$

$$\beta = \frac{v}{c}$$