73 ◆◆◆ **ORA PROVA TU** Due sistemi di riferimento inerziali in una dimensione S e S' hanno gli assi coordinati equiversi e le loro origini coincidono agli istanti $t = t' = 0$ s, quando una particella parte dall'origine O di S e, sempre in S, raggiunge la posizione $x = 1{,}90$ m all'istante t. La velocità di S' rispetto a S è $v = 1{,}13 \times 10^8$ m/s e la velocità della particella misurata nel sistema S' è $u' = 1{,}48 \times 10^8$ m/s.

▶ Calcola il valore dell'istante t e la velocità u della particella nel sistema S.

[$8{,}63 \times 10^{-9}$ s; $2{,}20 \times 10^8$ m/s]

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \end{cases}$$

$$v = 1{,}13 \times 10^8 \ \frac{m}{s}$$

S

$x = 1{,}90$ m

t

S'

$$x' = u't' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)$$

$$u' = \frac{\gamma(x - vt)}{t'} = \frac{\cancel{\gamma}(x - vt)}{\cancel{\gamma}\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$u'\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) = x - vt$$

da questa equazione ricavo t

$$u't - \frac{\beta u' x}{c} = x - vt \qquad u't + vt = x + \frac{\beta u' x}{c}$$

$$t(u' + v) = x\left(1 + \frac{\beta u'}{c}\right)$$

$$t = \frac{x}{u' + v}\left(1 + \frac{\beta u'}{c}\right) = \frac{x}{u' + v}\left(1 + \frac{v u'}{c^2}\right) =$$

$$= \frac{1{,}90 \ m}{(1{,}48 + 1{,}13) \times 10^8 \ \frac{m}{s}}\left(1 + \frac{1{,}13 \cdot 1{,}48 \times \cancel{10^{16}}}{9{,}00 \times \cancel{10^{16}}}\right) = 0{,}8632\ldots \times 10^{-8} \ s \simeq \boxed{8{,}63 \times 10^{-9} \ s}$$

in S

$$u = \frac{x}{t} = \frac{1{,}90 \ m}{8{,}632\ldots \times 10^{-9} \ s} = 0{,}22011\ldots \times 10^9 \ \frac{m}{s} \simeq \boxed{2{,}20 \times 10^8 \ \frac{m}{s}}$$

1 In un acceleratore, in una collisione tra protoni e antiprotoni, viene creata una particella che percorre la distanza $d = 78{,}0\ \text{m}$ in un intervallo di tempo $\Delta t = 1{,}20\ \mu\text{s}$, prima di decadere producendo altre particelle.

- Calcola il tempo di vita medio proprio della particella (cioè, il tempo di vita medio nel sistema di riferimento solidale con la particella).

TEMPO PROPRIO

[1,17 μs]

$v = \frac{d}{\Delta t}$ velocità della particella in S (del LAB.),
quindi è la velocità di S', in cui i 2 eventi (creazione e decadimento della particella) avvengono nello stesso punto dello spazio. Quindi $\Delta t'$ è il TEMPO PROPRIO

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{\Delta t}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot \Delta t =$$

$$= \sqrt{1-\frac{d^2}{\Delta t^2 \cdot c^2}} \cdot \Delta t = \sqrt{1-\frac{(78{,}0\ \text{m})^2}{(1{,}20\times10^{-6}\ \text{s})^2\left(3{,}00\times10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}}\left(1{,}20\times10^{-6}\ \text{s}\right) =$$

$$= \sqrt{1-\frac{(78{,}0)^2}{(1{,}20)^2(3{,}00)^2\times10^4}}\left(1{,}20\times10^{-6}\ \text{s}\right) =$$

$$= 1{,}17149\ldots\times10^{-6}\ \text{s} \simeq \boxed{1{,}17\times10^{-6}\ \text{s}}$$

2 In un acceleratore, un urto tra un protone e un antiprotone crea diverse particelle: una di queste si muove, rispetto al sistema di riferimento dell'acceleratore, con velocità $v_1 = 1{,}5 \times 10^8$ m/s per un tempo $\Delta t_1 = 4{,}60$ ns, prima di decadere in altre particelle; una seconda particella, creata nello stesso punto e allo stesso istante della prima, si muove in verso opposto alla prima con velocità $v_2 = -0{,}75 \times 10^8$ m/s e per un tempo $\Delta t_2 = 2{,}80$ ns, prima di decadere in altre particelle.

- Determina la velocità, rispetto al sistema di riferimento del laboratorio, del sistema di riferimento in cui i decadimenti delle due particelle sono simultanei.

[$1{,}8 \times 10^8$ m/s]

Nel S.R. S dell'acceleratore

$$\Delta t = 4{,}60 \text{ ns} - 2{,}80 \text{ ns} = 1{,}80 \text{ ns}$$

$$\Delta x = v_1 \Delta t_1 + |v_2| \Delta t_2 =$$

$$= \left(1{,}5 \times 10^8 \tfrac{m}{s}\right)\left(4{,}60 \times 10^{-9} s\right)$$

$$+ \left(0{,}75 \times 10^8 \tfrac{m}{s}\right)\left(2{,}80 \times 10^{-9} s\right)$$

$$= 0{,}90 \text{ m}$$

Nel S.R. S' in cui i 2 eventi (cioè i decadimenti) sono simultanei

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x\right) \quad \text{impongo } \Delta t' = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{\gamma}\left(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x\right) = 0 \qquad \frac{\beta}{c}\Delta x = \Delta t$$

$$\frac{v}{c^2}\Delta x = \Delta t$$

$$v = c^2 \frac{\Delta t}{\Delta x} = \left(3{,}00 \times 10^8 \tfrac{m}{s}\right)^2 \frac{\left(1{,}80 \times 10^{-9} s\right)}{0{,}90 \text{ m}} =$$

$$= 18 \times 10^7 \tfrac{m}{s} = \boxed{1{,}8 \times 10^8 \tfrac{m}{s}}$$

4 Il muone è una particella con la stessa carica dell'elettrone, ma massa circa 200 volte maggiore; il muone è instabile e ha un tempo di vita medio $\tau_0 = 2{,}2\ \mu s$ nel sistema di riferimento in cui è a riposo, prima di decadere dando luogo ad altre particelle. In relazione a un sistema di riferimento fisso rispetto al terreno, il tempo di vita medio τ del muone risulta maggiore a causa del fenomeno della dilatazione temporale.

▶ Mostra che la velocità del muone può essere espressa in funzione delle vite medie τ_0 e τ:

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2}$$

$$\tau = \gamma \tau_0 \qquad \text{TEMPO PROPRIO} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{\tau_0}{\tau} = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \frac{\tau_0}{\tau} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2 = 1-\frac{v^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1-\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2 \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2} \Rightarrow \boxed{v = c\sqrt{1-\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2}}$$

▶ Mostra che l'espressione ricavata vale qualsiasi sia il tempo di vita medio misurato nel sistema di riferimento solidale con il terreno; a quale valore tende la velocità quando la vita media del muone è molto maggiore di τ_0?

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2}$$

Essendo τ_0 tempo proprio, si ha che $\tau_0 < \tau$, per cui $\frac{\tau_0}{\tau} < 1$ e dunque $\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2 < 1$.

Quindi il radicando è sempre ≥ 0 e l'espressione ha sempre senso

$\tau \gg \tau_0$ si traduce matematicamente in $\lim_{\tau \to +\infty} \frac{\tau_0}{\tau} = 0$

MOLTO MAGGIORE

$$\lim_{\tau \to +\infty} v = \lim_{\tau \to +\infty} c\sqrt{1-\underbrace{\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2}_{\to 0}} = c$$

v tende alla velocità della luce c

▶ Calcola la distanza percorsa da un muone che decade dopo 4,6 μs, secondo il sistema S solidale con la Terra.

Nel S.R. terrestre la distanza percorsa è

$$d = v \cdot \tau = c\sqrt{1-\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2} \cdot \tau = c\sqrt{1-\frac{\tau_0^2}{\tau^2}} \cdot t =$$

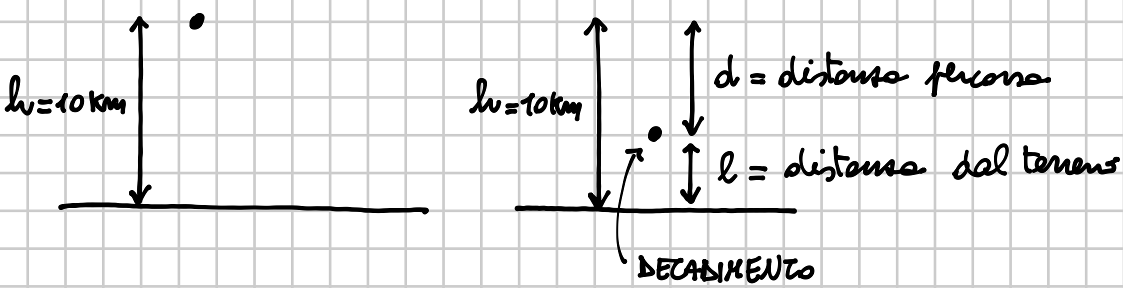
$$= c\sqrt{\frac{\tau^2-\tau_0^2}{\tau^2}} \cdot \tau = \frac{c}{\cancel{\tau}}\sqrt{\tau^2-\tau_0^2} \cdot \cancel{\tau} =$$

$$= c\sqrt{\tau^2-\tau_0^2} = \left(3{,}0 \times 10^8 \frac{m}{s}\right)\sqrt{(4{,}6)^2-(2{,}2)^2} \times 10^{-6}\, s =$$

$$= 1211{,}34\ldots\, m \simeq \boxed{1{,}2\ km}$$

▶ Supponi che il muone sia creato a distanza $h = 10$ km dal suolo e sia diretto verso di esso a velocità $v_0 = 0{,}95c$, secondo il sistema di riferimento solidale con il terreno. Nel sistema di riferimento del muone, qual è la distanza dal suolo del muone nel momento in cui decade?

[c; 1,2 km; 2,5 km]



$$l' = h' - d' = \frac{h}{\gamma} - d' = \frac{h}{\gamma} - v_0 \tau_0 =$$

NEL S.R. DEL MUONE

$$= \sqrt{1-\beta^2} \cdot h - v_0 \tau_0$$

$\beta = 0{,}95$

$$= \sqrt{1-(0{,}95)^2} \cdot 10 \times 10^3\, m - 0{,}95\left(3{,}0 \times 10^8 \frac{m}{s}\right)\left(2{,}2 \times 10^{-6}\, s\right)$$

$$= 3122{,}4989\ldots\, m - 627\, m = 2495{,}4\ldots\, m$$

$$\simeq \boxed{2{,}5\ km}$$

16 ★★★ I muoni sono particelle elementari instabili che decadono in altre particelle, e hanno tempo di dimezzamento $\tau = 2{,}20\ \mu s$ nel sistema di riferimento in cui sono a riposo. I muoni vengono prodotti in abbondanza nelle regioni superiori dell'atmosfera dalla collisione tra i raggi cosmici (radiazione proveniente dallo spazio) e le molecole d'aria. Un muone è prodotto all'altezza $h = 12$ km dalla superficie terrestre, con velocità $v = 0{,}98\ c$ e diretto verso il suolo. Ad altezza $h' = 10$ km dal suolo è posto un rivelatore di muoni.

- ▶ Calcola la distanza percorsa in media dal muone prima di decadere, secondo le leggi della fisica classica.
- ▶ Calcola la distanza percorsa in media dal muone prima di decadere, nel sistema di riferimento della Terra, secondo le leggi della relatività ristretta.
- ▶ Il muone giunge al rivelatore?

[$6{,}5 \times 10^2$ m; $3{,}3 \times 10^3$ m; sì]

1) Secondo le leggi della fisica classica la distanza percorsa dal muone è

$$d = v\tau = (0{,}98)\left(3{,}0 \times 10^8 \frac{m}{s}\right)\left(2{,}20 \times 10^{-6} s\right) =$$

$$= 6{,}468 \times 10^2\ m \simeq \boxed{6{,}5 \times 10^2\ m}$$

2) Secondo la relatività ristretta, nel S.R. terrestre la distanza percorsa è

$$d = v\underbrace{\gamma\tau}_{\substack{\text{TEMPO}\\\text{DILATATO}\\\text{(NEL S.R. TERRA)}}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}98)^2}}\ 6{,}468 \times 10^2\ m =$$

τ = TEMPO PROPRIO DEL MUONE

$$= 32{,}50\ldots \times 10^2\ m \simeq \boxed{3{,}3 \times 10^3\ m}$$

3) La distanza tra il punto di origine del muone e il rivelatore è (nel S.R. terrestre) di 2 km. Dato che nel S.R. terrestre il muone percorre $3{,}3 \times 10^3$ m prima di decadere, riesce ad arrivare al rivelatore

17 ★★★ Considera nuovamente la situazione del problema precedente.

▶ Spiega il risultato relativistico, e in particolare il raggiungimento del rivelatore, mettendoti nel sistema di riferimento solidale con il muone.

Nel S.R. del muone il tempo di vita è $\tau = 2{,}20\ \mu s$, ma la distanza da percorrere è contratta.

Se nel S.R. terrestre la distanza è 2 Km, nel S.R. del muone è

$$d' = \frac{2\ \text{Km}}{\gamma} = \sqrt{1-(0{,}98)^2}\ (2{,}0 \times 10^3\ m) =$$

$$= 0{,}3979\ldots \times 10^3\ m \simeq 4{,}0 \times 10^2\ m$$

Nel suo tempo di vita medio, il muone riesce a percorrere

$$l = v\tau = (0{,}98\,c)(2{,}20\ \mu s) = \ldots \simeq 650\ m > 400\ m$$

COME PRIMA

quindi anche nel S.R. del muone il rivelatore è raggiunto