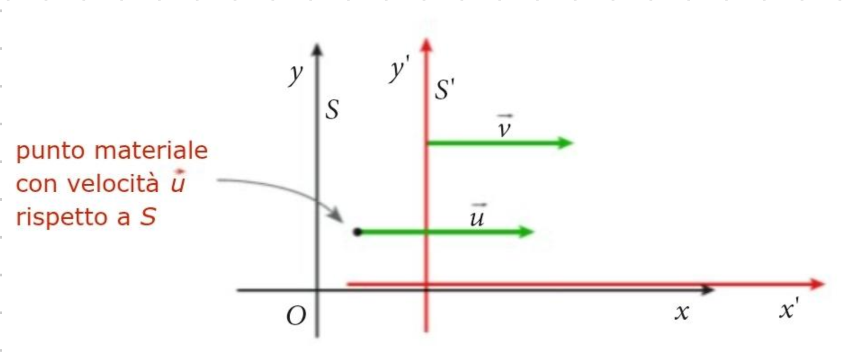
COMPOSIZIONE RELATIVISTICA DELLE VELOCITÀ



velocità del punto materiale rispetto a S' (m/s)

velocità del punto materiale rispetto a S (m/s)

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

velocità di S' rispetto a S (m/s)

velocità della luce (m/s)

TRASF. LORENTZ
$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \end{cases} \xrightarrow{\text{DERIVATA RISP. A } t} \begin{cases} \frac{dx'}{dt} = \gamma\left(\frac{dx}{dt} - v\right) \\ \frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{\beta}{c}\frac{dx}{dt}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt} = \gamma(u - v) \\ \frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{\beta}{c}u\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} dx' = \gamma(u - v)\,dt \\ dt' = \gamma\left(1 - \frac{\beta}{c}u\right)dt \end{cases}$$

DIVIDO MEMBRO A MEMBRO

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{u - v}{1 - \frac{\beta}{c}u}$$

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\boxed{u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}}$$

FORMULA INVERSA

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

(SCAMBIO v CON $-v$)

OSSERVAZIONI

1) Se $\begin{cases} u \ll c \\ v \ll c \end{cases}$ ritroviamo la legge di composizione di Galileo:

$$u' = u - v$$

Se almeno una fra u e v è paragonabile a c, devo usare la legge relativistica

2) Se $u = c$

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} = \frac{c - v}{1 - \frac{\cancel{c}v}{c^{\cancel{2}}}} = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{c - v}{\frac{c - v}{c}} = \cancel{(c - v)} \cdot \frac{c}{\cancel{c - v}} = c$$

39 ◆◆◆ Una navetta spaziale si muove a una velocità pari a $1{,}2 \times 10^8$ m/s rispetto alla Terra. Dalla navetta dev'essere lanciata una sonda che si muove a velocità doppia, sempre rispetto alla Terra.

▶ Calcola la velocità della sonda rispetto alla navetta.

[$1{,}8 \times 10^8$ m/s]

S = SIST. TERRA

u = VEL. SONDA RISP. S $= 2v$

S' = SIST. NAVETTA

u' = VEL. SONDA RISP. S'

$v = 1{,}2 \times 10^8 \ \frac{m}{s}$

VEL. DI S' RISP. A S

$\Downarrow$

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} = \frac{2v - v}{1 - \frac{2v^2}{c^2}} = \frac{v}{1 - \frac{2v^2}{c^2}} =$$

$$= \frac{1{,}2 \times 10^8 \ \frac{m}{s}}{1 - 2\left(\frac{1{,}2}{3{,}0}\right)^2} = 1{,}7647\ldots \times 10^8 \ \frac{m}{s}$$

$$\simeq \boxed{1{,}8 \times 10^8 \ \frac{m}{s}}$$

41 ◆◆◆ Tre fasci di particelle viaggiano uno dietro l'altro all'interno di un acceleratore di particelle. Il primo fascio ha velocità $v_{1,2} = c/2$ rispetto al secondo, il quale ha velocità $v_{2,3} = c/2$ rispetto al terzo, il quale ha velocità $v_3 = c/2$ rispetto al laboratorio.

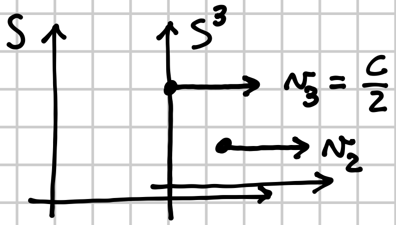
▶ Calcola la velocità del primo fascio di particelle rispetto al laboratorio.

[$13c/14$]

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \quad \text{F. INVERSA}$$



SIST. LABOR.

v_2 = vel. del 2° fascio in S

Uso la f. inversa per trovare v_2, sapendo $v_{2,3} = \frac{c}{2}$

$$v_2 = \frac{v_{2,3} + v_3}{1 + \frac{v_{2,3} \cdot v_3}{c^2}} = \frac{\frac{c}{2} + \frac{c}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{c}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}c$$

Faccio la stessa cosa per trovare v_1 = vel. del 1° fascio risp. a S

$$v_1 = \frac{v_{1,2} + v_2}{1 + \frac{v_{1,2} \cdot v_2}{c^2}} = \frac{\frac{c}{2} + \frac{4}{5}c}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{\frac{5+8}{10}c}{\frac{7}{5}} = \frac{13}{\cancel{10}_{2}}c \cdot \frac{\cancel{5}^{1}}{7} = \boxed{\frac{13}{14}c}$$

ESAME 2019

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

7. In laboratorio si sta osservando il moto di una particella che si muove nel verso positivo dell'asse x di un sistema di riferimento ad esso solidale. All'istante iniziale, la particella si trova nell'origine e in un intervallo di tempo di 2,0 ns percorre una distanza di 25 cm. Una navicella passa con velocità $v = 0{,}80\,c$ lungo la direzione x del laboratorio, nel verso positivo, e da essa si osserva il moto della stessa particella. Determinare le velocità medie della particella nei due sistemi di riferimento. Quale intervallo di tempo e quale distanza misurerebbe un osservatore posto sulla navicella?

$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{25\text{ cm}}{2{,}0\text{ ns}}$ velocità della particella in S (LAB.)

$$= \frac{25\times10^{-2}\text{ m}}{2{,}0\times10^{-9}\text{ s}} = 12{,}5\times10^{7}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \simeq \boxed{1{,}3\times10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$= \frac{1{,}25}{3{,}00}\times 3{,}00\times10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{125}{300}\,c = \frac{5}{12}\,c$$

vel. particella in S' (NAVICELLA)

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} = \frac{\frac{5}{12}c - \frac{4}{5}c}{1 - \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{5}} = \frac{\frac{25-48}{60}\,c}{1-\frac{1}{3}} = -\frac{\frac{23}{60}}{\frac{2}{3}}\,c = -\frac{23}{\cancel{60}_{20}}\cdot\frac{\cancel{3}^{1}}{2}\,c =$$

$v = 0{,}80\,c = \frac{8}{10}\,c = \frac{4}{5}\,c$

$$= \boxed{-\frac{23}{40}\,c}$$

"meno" perché il verso è opposto a quello positivo

S (LABORATORIO)

$\Delta x = 25\text{ cm}$

$\Delta t = 2{,}0\times10^{-9}\text{ s}$

$\beta = 0{,}80 = \frac{4}{5}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{16}{25}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{25}}} = \frac{5}{3}$$

S' (NAVICELLA)

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) =$$

$$= \frac{5}{3}\left(0{,}25 - 0{,}80\times3{,}0\times10^{8}\times2{,}0\times10^{-9}\right)\text{ m}$$

$$= -0{,}38\bar{3}\text{ m} \simeq \boxed{-0{,}38\text{ m}}$$

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x\right) = \frac{5}{3}\left(2{,}0\times10^{-9} - \frac{4\cdot(0{,}25)}{5\times3{,}0\times10^{8}}\right)\text{ s}$$

$$= 2{,}22\ldots\times10^{-9}\text{ s} \simeq \boxed{2{,}2\text{ ns}}$$